

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Г.А. СИКОРСКАЯ, Г.Н. ЛОКТИОНОВА



РГЗ
ДИСЦИПЛИНА ПОВТ
ДИСТАНЦИОННАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ
I СЕМЕСТР

Факультет
Дистанционных
Образовательных
Технологий

Оренбург 2007

© Факультет Дистанционных Образовательных Технологий ОГУ



УДК

ББК

Рецензенты

кандидат педагогических наук Липилина В.В.

Сикорская Г.А., Локтионова Г.Н.

**РГЗ/. I семестр. Г.А. Сикорская, Г.Н. Локтионова Оренбург:
ГОУ ОГУ, 2007. - с.**



**Факультет
Дистанционных
Образовательных
Технологий**

ББК

ISBN

©Сикорская Г.А., 2007
Локтионова Г.Н., 2007
©ГОУ ОГУ, 2007



Содержание

Введение.....	4
1 Образец решения контрольной работы (нулевой вариант).....	5
2 Индивидуальные задания РГЗ	23
3 Список рекомендуемой литературы.....	42



Введение

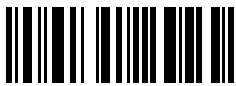
Курс алгебры и геометрии, читаемый студентам транспортного факультета (параллельно с курсом математического анализа) опирается на базовый курс математики, изучаемый в средней школе.

Курс алгебры и геометрии представляет собой математическую теорию, охватывающую первоначальные сведения об основных алгебраических структурах, теорию матриц и определителей, векторную алгебру, теорию линейных и евклидовых пространств, теорию линейных операторов, аналитическую геометрию, дифференциальную геометрию и топологию.

В результате теоретической части курса студент приобретает знания основных понятий дисциплины, понимание и умение доказательства теории, навыки решения математических задач методами линейной и векторной алгебры с доведением решения до практически приемлемого результата (формулы, числа, графика, качественного вывода и т.д.), на базе чего развивается логическое и алгоритмическое мышление, навыки математического исследования прикладных вопросов (перевод реальной задачи на математический язык, выбор оптимального метода ее решения и исследования, интерпретация и оценка полученных результатов и т.п.).

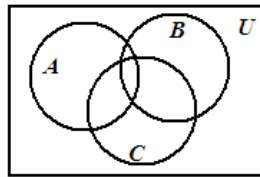
Изучение курса алгебры и геометрии способствует формированию понимания необходимости математической составляющей в общей подготовке, представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, умения оперировать абстрактными объектами, корректно использовать математические понятия и символы для выражения количественных и качественных отношений.

Настоящие методические указания помогут студенту-дистанционнику выполнить контрольную работу, необходимую для получения соответствующей аттестации (зачета) за I семестр по дисциплине «Алгебра и геометрия».



1 Образец решения контрольной работы (нулевой вариант)

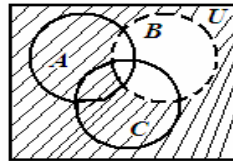
Задача 1 Пусть в универсальном множестве U заданы три непустые взаимно пересекающихся множества A , B , C следующим образом:



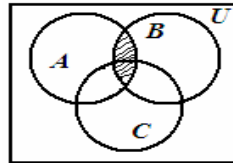
Изобразите множество $(A \setminus \overline{B}) \cap C \cup (\overline{B \setminus C})$.

Решение. Выполняем задание по действиям:

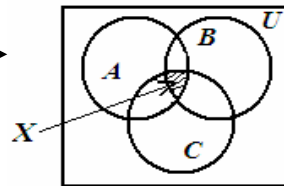
1) $\overline{B} \longrightarrow$



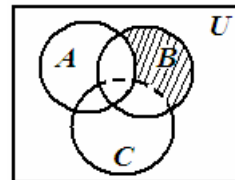
2) $A \setminus \overline{B} \longrightarrow$



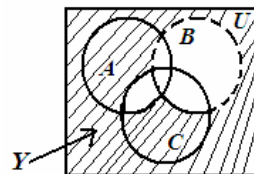
3) $(A \setminus \overline{B}) \cap C = X \longrightarrow$



4) $B \setminus C \longrightarrow$



5) $\overline{(B \setminus C)} = Y \longrightarrow$



6) $(A \setminus \overline{B}) \cap C \cup (\overline{B \setminus C}) = X \cup Y \rightarrow \emptyset$

Результатом выполненных действий над множествами A , B и C служит пустое множество.

Задача 2 Пусть $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -3i$, $z_4 = 1 + i$

Найти значение $\frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4}$.

Решение. Комплексное число отличающееся от данного только знаком мнимой части называется сопряженным данному. Так, сопряженным числу $z_2 = 2 - i$, будет число $\overline{z_2} = 2 + i$. Выполним задачу по действиям:

$$\begin{aligned} 1) \quad z_1 + \overline{z_2} &= i + 2 + i = 2 + 2i \\ 2) \quad z_3 \cdot z_4 &= -3i \cdot (1 + i) = -3i + 3 = 3 - 3i \\ 3) \quad \frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4} &= \frac{2 + 2i}{3 - 3i} = \frac{(2 + 2i) \cdot (3 + 3i)}{(3 - 3i) \cdot (3 + 3i)} = \frac{6 + 6i + 6i - 6}{9 + 9} = \frac{12i}{18} = \frac{2}{3}i \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{2}{3}i$

Задача 3 Найти корни уравнения $z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$.

Решение. Перепишем заданное уравнение в виде

$$z^3 = 1 - i\sqrt{3}.$$

Запишем комплексное число, стоящее в правой части полученного уравнения в тригонометрическом виде, а затем извлечем из него корень кубический.

$$\begin{aligned} 1) \quad w &= 1 - i\sqrt{3} \quad (x = 1, y = -\sqrt{3}), \\ w &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2, \\ \varphi_1 &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Находим главный аргумент

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}.$$

Таким образом,

$$w = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

$$2) \quad z^3 = w \Rightarrow z = \sqrt[3]{w}.$$

Используя формулу извлечения корня из комплексного числа, имеем

$$z_k = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Следовательно, корнями заданного в задаче уравнения являются:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{9} + i \sin \frac{5\pi}{9} \right);$$



$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{9} + i \sin \frac{11\pi}{9} \right);$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{9} + i \sin \frac{17\pi}{9} \right).$$

Задача 4 Найти наибольший общий делитель многочленов и представить его в линейной форме:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,$$

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1.$$

Решение. Применим к многочленам $f(x)$ и $g(x)$ алгоритм Евклида.

$$\begin{array}{r|l} f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2 & 2x^3 + x^2 - x - 1 = g(x) \\ 2x^4 + x^3 - x^2 - x & x + 1 = q_1(x) \\ \hline -2x^3 - 2x^2 - 4x + 2 & \\ 2x^3 + x^2 - x - 1 & \\ \hline -3x^2 - 3x + 3 = r_1(x) & \end{array}$$

$$\text{т.е. } f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x).$$

$$\begin{array}{r|l} g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1 & -3x^2 - 3x + 3 = r_1(x) \\ 2x^3 + 2x^2 - 2x & -2/3x + 1/3 = q_2(x) \\ \hline -x^2 + x - 1 & \\ -x^2 - x + 1 & \\ \hline 2x - 2 = r_2(x) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} r_1(x) = -3x^2 - 3x + 3 & 2x - 2 = r_2(x) \\ -3x^2 + 3x & -3/2x - 3 = q_3(x) \\ \hline -6x + 3 & \\ -6x + 6 & \\ \hline -3 = r_3(x) \neq 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} r_2(x) = 2x - 2 & -3 = r_3(x) \\ 2x & -2/3x + 2/3 = q_4(x) \\ \hline -2 & \\ -2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Таким образом, $(f(x), g(x)) = d(x) = r_3(x) = -3$.

Запишем равенства алгоритма Евклида:

$$\begin{cases} f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), & \text{ст. } r_1(x) < \text{ст. } g(x) \\ g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), & \text{ст. } r_1(x) < \text{ст. } r_2(x) \\ r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x) = d(x), & \text{ст. } r_3(x) < \text{ст. } r_2(x) \\ r_2(x) = r_3(x)q_4(x) + 0. \end{cases} \quad (1)$$

Учитывая равенства (1), выразим $d(x)$ в линейной форме:

$$\begin{aligned} d(x) &= r_1(x) - r_2(x)q_3(x) = r_1(x) - (g(x) - r_1(x)q_2(x))q_3(x) = \\ &= r_1(x)(1 + q_2(x)q_3(x)) + (-q_3(x))g(x) = (f(x) - g(x)q_1(x))(1 + q_2(x)q_3(x)) + \\ &+ (-q_3(x))g(x) = f(x)\underbrace{(1 + q_2(x)q_3(x))}_{u(x)} + g(x)\underbrace{(-q_1(x) - q_1(x)q_2(x)q_3(x) - q_3(x))}_{v(x)}. \end{aligned}$$

Находим многочлены $u(x)$ и $v(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + q_2(x)q_3(x) = 1 + (-2x/3 + 1/3)(-3x/2 - 3) = \\ &= 1 + (x^2 - x/2 + 2x - 1) = 1 + (x^2 + 3x/2 - 1) = x^2 + 3x/2; \\ v(x) &= -q_1(x) + q_1(x)q_2(x)q_3(x) - q_3(x) = -(x+1) - \\ &-(x+1)(-2x/3 + 1/3)(-3x/2 - 3) - (-3x/2 - 3) = \\ &= -(x+1) - (-2x^2/3 - x/3 + 1/3)(-3x/2 - 3) - (-3x/2 - 3) = \\ &= -(x+1) - (x^3 + 5x^2/2 + x/2 - 1) - (-3x/2 - 3) = -x - 1 - x^3 - 5x^2/2 - x/2 + 1 + \\ &+ 3x/2 + 3 = -x^3 - 5x^2/2 + 3. \end{aligned}$$

Получили: $u(x) = x^2 + 3x/2$; $v(x) = -x^3 - 5x^2/2 + 3$.

Итак, имеем

$$-3 = (x^2 + 3x/2)f(x) + (-x^3 - 5x^2/2 + 3 + 3)g(x).$$

Проверка:

$$\begin{aligned} -3 &= (x^2 + 3x/2)(2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2) + \\ &+ (-x^3 - 5x^2/2 + 3 + 3)(2x^3 + x^2 - x - 1) = 2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x^5 + \\ &+ 9x^4/2 - 9x^3/2 - 15x^2/2 + 6x/2 + (-2x^6 - 5x^5 + 6x^3 - x^5 - 5x^4/2 + 3x^2 + x^4 + 5x^3/2 - \\ &- 3x + x^3 + 5x^2/2 - 3) = 2x^6 + 6x^5 + 3x^4/2 - 19x^3/2 - 11x^2/2 + 3x - 2x^6 - \\ &- 6x^5 - 3x^4/2 + 19x^3/2 + 11x^2/2 - 3x - 3 = -3. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } -3 = f(x)(x^2 + 3x/2) + g(x)(-x^3 - 5x^2/2 + 3 + 3)$$

Задача 5 Даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) AB ; б) BA ; в) A^{-1} ; г) AA^{-1} ; д) $A^{-1}A$.

Решение. а) Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Находим матрицу $C = AB$, элементы которой

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Имеем:

$$C = AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Вычислим BA :

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6 \\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2 \\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $AB \neq BA$.

в) Обратную матрицу A^{-1} матрицы A находим по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Итак

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 4 + 3 + 24 = 39 \neq 0,$$

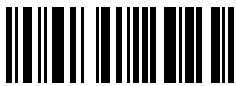
т.е. матрица A - невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1} .

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Тогда



$$A^{-1} = \frac{1}{39} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix};$$

г) Вычислим AA^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

$$\text{д) } A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 6 Дан определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$.

1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12} , a_{32} .

2) Вычислить данный определитель

а) разложив его по элементам первой строки;

б) приведением определителя к треугольному виду;

в) методом опорного элемента.

Решение. 1) Находим:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16 = -18,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 - 12 - 8 = -20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-18) = 18,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -(-20) = 20.$$



2) а) Прежде чем раскладывать определитель по элементам первой строки на основании свойств определителя обнулим все элементы первой строки кроме одного. Для этого умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на -2 и прибавим ко второму. Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -(-56 + 18) = 38.$$

б) На основании свойств, приведем заданный определитель к треугольному виду и воспользуемся тем, что определитель треугольного вида равен произведению элементов его главной диагонали. Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} -S_1+S_2 \\ S_1+S_3 \\ S_1+S_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -4 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} S_2 \leftrightarrow S_3 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2S_2+S_3 \\ -S_2+S_4 \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} S_2 \leftrightarrow S_4 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2S_2+S_4 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} S_3 \leftrightarrow S_4 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4S_4+S_5 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \end{vmatrix} =$$

$$= -(1 \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 19) = 38.$$

в) Используя свойства определителей, переставим столбцы так же как и в предыдущем решении с тем, чтобы в левом верхнем углу стояла единица и воспользуемся формулой метода опорного элемента:



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}^2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{31} & a_{34} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1^2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & -3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

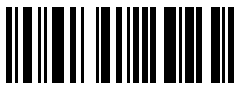
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (16 + 3) = 2 \cdot 19 = 38$$

Задача 7 Найти ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Преобразуем матрицу.

$$A \xrightarrow{\begin{matrix} S_2 + (-2)S_1 \\ S_3 + (-3)S_1 \\ S_4 + (-2)S_1 \\ S_5 + (-1)S_1 \\ S_6 + (-3)S_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$



так как действие $-S_2+S_3$ дает нулевую строчку, то вычеркивая нуль-строчку получаем

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -6 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3+(-2)S_2 \\ S_4+(-3)S_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-S_3+S_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

В результате проверенных элементарных преобразований исходной матрицы получим трапецивидную матрицу, ранг которой равен трем. Следовательно, $\text{rang } A=3$.

Заметим, ранг матрицы не меняется вследствие проведения элементарных преобразований матрицы как над строками так и над столбцами.

Задача 8 Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее:

- по формулам Крамера;
- с помощью обратной матрицы (матричным методом);
- методом Гаусса.

Решение. Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы данной системы и ранг расширенной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array} \right).$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{array} \right).$$



Следовательно, $\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} = 3$ (т.е. числу неизвестных). Значит исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) Формулы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

находим $\Delta = \det A$, Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32,$$

далее, подставляя в формулы Крамера, получим:

$$x_1 = \frac{64}{(-16)} = -4, \quad x_2 = \frac{-16}{(-16)} = 1, \quad x_3 = \frac{32}{(-16)} = -2;$$

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $AX = B$. Решение системы в матричной форме имеет вид $X = A^{-1}B$. Находим обратную матрицу A^{-1} (она существует, так как $\Delta = \det A = -16 \neq 0$) по формуле через алгебраические дополнения.:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11;$$

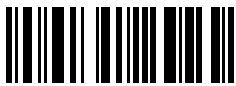
$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $X = A^{-1}B$, то



$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} (-45 + 32 + 77) / (-16) \\ (-9 - 7) / (-16) \\ (-42 + 32 + 42) / (-16) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -64 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$;

в) Решим систему методом Гаусса. Для этого составим $\tilde{A}$ - расширенную матрицу системы и посредством элементарных преобразований над ее строками приводим $\tilde{A}$ к треугольному (трапециевидному) виду.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{S_1 \cdot (-2) + S_2 \\ S_1 \cdot (-3) + S_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array} \right) \xrightarrow{S_2 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & -16 & 0 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{S_2 \cdot 16 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1/6 & 2/3 \\ 0 & 0 & 8/3 & -16/3 \end{array} \right).$$

Таким образом

$$\frac{8}{3}x_3 = -\frac{16}{3},$$

$$x_3 = -\frac{16}{8} \Rightarrow x_3 = -2.$$

Далее,

$$x_2 + \frac{1}{6}x_3 = \frac{2}{3},$$

$$x_2 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3},$$

$$x_2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

Теперь, используя первую строчку, получаем

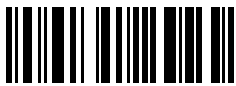
$$x_1 + 5x_2 - 1 \cdot x_3 = 3,$$

$$x_1 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3,$$

$$x_1 = -5 - 2 + 3,$$

$$x_1 = -4.$$

Таким образом, мы доказали совместность исходной системы и решили ее тремя способами. $\{(-4, 1, 2)\}$ - ее решение.



Задача 9 Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

то система имеет бесчисленное множество решений. Поскольку $\text{rang} A = 2$, $n = 3$, возьмем любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдем ее решение.

Имеем:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и переместим члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_3, \\ x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

находим

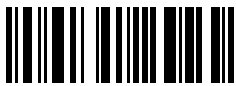
$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Теперь подставляя в формулы Крамера, получаем

$$x_1 = -\frac{17x_3}{13}, \quad x_2 = \frac{16x_3}{13}.$$



Полагая $x_3 = 13c$, где $c \in R$, получаем решение исходной системы:

$$x_1 = -17c, \quad x_2 = 16c.$$

Ответ. $\{(-17c, 16c, c), c = \text{const}\}$.

Задача 10 Найти ФСР и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

равен 2 (проверьте самостоятельно), поэтому размерность пространства решений данной системы равна $n - r = 5 - 2 = 3$ и ее ФСР состоит из трех решений. В матрице A возьмем в качестве базисного минора выделенный рамкой минор второго порядка. Третья строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк, поэтому последнее уравнение системы является следствием первых двух уравнений и его можно отбросить. В первых двух уравнениях члены, соответствующие базисному минору, оставляем в левой части, а неизвестные x_1, x_4, x_5 считаем «свободными» и переносим члены с этими неизвестными в правые части уравнений. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5 = 0, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

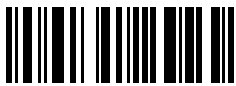
равносильной исходной системе, т.е. множество решений системы (1) совпадает с множеством решений исходной системы уравнений.

Найдем первое базисное решение X_1 . Для этого положим $x_1 = 1, x_4 = x_5 = 0$. Система (1) примет вид

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Определителем матрицы полученной системы является базисный минор, отличный от нуля. Следовательно, эта система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера: $x_2 = 2, x_3 = 0$. Таким

образом, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Полагая в системе (1) $x_1 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, находим



$$x_2 = 13, x_3 = 5, \text{ т.е. вторым базисным решением является столбец } X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, полагая $x_1 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, находим $x_2 = 1, x_3 = -1$. Следовательно,

$$\text{третье базисное решение есть } X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Итак, ФСР, состоящая из решений}$$

X_1, X_2, X_3 , построена. Построенная таким образом ФСР называется нормальной ФСР. Подчеркнем, что столбцы X_1, X_2, X_3 , образующие нормальную ФСР, линейно независимы, поскольку «свободные» неизвестные x_1, x_4, x_5 были выбраны так, что выделенный рамками минор третьего порядка в матрице из этих столбцов

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{matrix}} \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля, и поэтому ранг этой матрицы равен 3, т.е. равен числу столбцов матрицы.

Напишем теперь общее решение исходной системы уравнений:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,$$

или, в координатах,

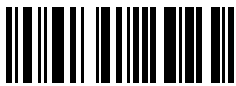
$$x_1 = c_1, x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3, x_3 = 5c_2 - c_3, x_4 = c_2, x_5 = c_3$$

где c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

Задача 11 По координатам точек $A(-5,1,6), B(1,4,3), C(6,3,9)$ найти:

- модуль вектора $\vec{a} = 4\vec{AB} + \vec{BC}$;
- скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b} = \vec{BC}$;
- проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \vec{AB}$;
- координаты точки M , делящей отрезок $l = \vec{AB}$ в отношении 1/3.

Решение. а) Последовательно находим $\vec{AB} = \{6,3,-3\}, \vec{BC} = \{5,-1,6\}$, тогда $4\vec{AB} + \vec{BC} = \{29,11,-6\}$.



Находим длину вектора $\vec{a} = 4\vec{AB} + \vec{BC}$

$$|\vec{a}| = |4\vec{AB} + \vec{BC}| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998};$$

б) Зная координаты векторов $\vec{a} = \{29, 11, -6\}$, $\vec{b} = \{5, -1, 6\}$, вычислим их скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 29 \cdot 5 + 11(-1) + (-6)6 = 98;$$

в) Так как

$$\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|}, \quad \vec{d} = \{6, 3, -3\},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 30 - 3 - 18 = 9; \quad |\vec{d}| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54},$$

то

$$\text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{9}{\sqrt{54}}.$$

г) Подставляя в формулы

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

значения $x_1 = -5$, $y_1 = 1$, $z_1 = 6$, $x_2 = 1$, $y_2 = 4$, $z_2 = 3$, $\lambda = \frac{1}{3}$, получим координаты

точки M , делящий отрезок $l = \overline{AB}$ в отношении $\frac{1}{3}$:

$$x = \frac{-5 + \frac{1}{3} \cdot 1}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{7}{2}; \quad y = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 4}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}; \quad z = \frac{6 + \frac{1}{3} \cdot 3}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{21}{4}.$$

Следовательно, $M(-7/2, 7/4, 21/4)$.

Задача 12 Доказать, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе, если $\vec{p} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{q} = \{1; -2; 0\}$, $\vec{r} = \{0; 3; 1\}$, $\vec{x} = \{2; 7; 5\}$.

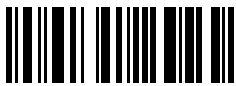
Решение. Докажем, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{векторы } \vec{p}, \vec{q}, \vec{r} - \text{линейно независимы, значит,}$$

они образуют базис.

Найдем координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$. Разложим вектор $\vec{x}$ по векторам базиса $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$, получим: $\vec{x} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q} + \gamma \vec{r}$ (*).

Найдем коэффициенты разложения, то есть α, β, γ , а они, в свою очередь, будут являться координатами вектора $\vec{x}$ в этом базисе (по определению).



Для этого разложим все векторы по векторам ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$: $\bar{x} = 2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{p} = \bar{i} + \bar{k}$, $\bar{q} = \bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{r} = 3\bar{j} + \bar{k}$.

Далее, подставим все разложения в равенство (*), имеем:

$$2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k} = x(\bar{i} + \bar{k}) + y(\bar{i} - 2\bar{j}) + z(3\bar{j} + \bar{k})$$

или

$$2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k} = (x + y)\bar{i} + (-2y + 3z)\bar{j} + (x + z)\bar{k}.$$

Соберем коэффициенты при векторах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -2\beta + 3\gamma = 7, \\ \alpha + \gamma = 5. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-2)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Таким образом, $r(A) = r(A^*) = 3$, следовательно, система совместна и $n = 3 = r$, значит, она имеет единственное решение.

Полученной расширенной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -\beta + \gamma = 3, \\ \gamma = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = -2, \\ \gamma = 1. \end{cases}$$

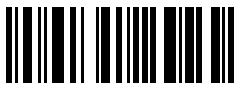
Подставим α, β, γ в равенство (*), получим:

$$\bar{x} = 4\bar{p} - 2\bar{q} + \bar{r} \Rightarrow \bar{x} = \{4, -2, 1\} \text{ в базисе } \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}.$$

Задание 13 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$; $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 1$, $\left(\bar{p}, \bar{q} \right) = \frac{2\pi}{3}$.

Решение. Воспользуемся геометрическим смыслом модуля векторного произведения двух векторов, а именно: площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю их векторного произведения: $S_{\text{пар}} = |\left[\bar{a}, \bar{b} \right]|$.

$$\begin{aligned} \text{Применим свойства векторного произведения векторов } \bar{a} \text{ и } \bar{b}, \text{ вычислим} \\ \left[\bar{a}, \bar{b} \right] &= [2\bar{p} + 3\bar{q}, \bar{p} - 2\bar{q}] = 2[\bar{p}, \bar{p}] - 4[\bar{p}, \bar{q}] + 3[\bar{q}, \bar{p}] - 6[\bar{q}, \bar{q}] = \\ &= 2 \cdot 0 - 4[\bar{p}, \bar{q}] - 3[\bar{p}, \bar{q}] - 6 \cdot 0 = -7[\bar{p}, \bar{q}]. \end{aligned}$$



Вычислим модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, используя первое условие из определения векторного произведения, а именно:
 $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$.

Тогда,

$$S_{нар} = |\vec{a}, \vec{b}| = |-7[\vec{p}, \vec{q}]| = 7|\vec{p}, \vec{q}| = 7|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin\left(\angle \vec{p}, \vec{q}\right) =$$

$$= 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

Итак, $S_{нар} = 7\sqrt{3}$ (кв.ед.).

Задача 14 Компланарны ли векторы $\vec{a} = \{7, 4, 6\}$, $\vec{b} = \{2, 1, 1\}$, $\vec{c} = \{19, 11, 17\}$?

Решение. Для того, чтобы три вектора были компланарны (лежали в одной плоскости или в параллельных плоскостях), необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ было равно нулю.

Вычисляем смешанное произведение векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 0.$$

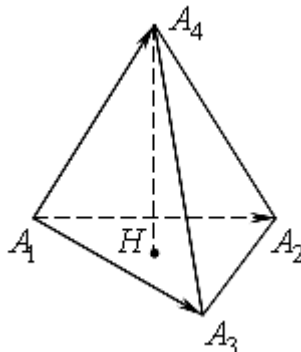
Т.к. определитель равен нулю, то векторы компланарны (если определитель не равен нулю – векторы не компланарны).

Так как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Ответ. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Задание 15 Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, если $A_1(1, 3, 0)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(3, 0, 1)$, $A_4(-4, 3, 5)$.

Решение. Сделаем чертеж:



В соответствии с геометрическим смыслом модуля смешанного произведения векторов, имеем:

$$V_{тет} = \frac{1}{6} V_{нар-да} = \frac{1}{6} |(\vec{A_1 A_2}, \vec{A_1 A_3}, \vec{A_1 A_4})|.$$

Найдем координаты векторов $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_1 A_3}$, $\overline{A_1 A_4}$.

$$\overline{A_1 A_2} = \{(4-1), (-1-3), (2-0)\} = \{3, -4, 2\},$$

$$\overline{A_1 A_3} = \{(3-1), (0-3), (1-0)\} = \{2, -3, 1\},$$

$$\overline{A_1 A_4} = \{(-4-1), (3-3), (5-0)\} = \{-5, 0, 5\}.$$

Найдем смешанное произведение векторов $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_1 A_3}$, $\overline{A_1 A_4}$.

$$(\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}, \overline{A_1 A_4}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -45 + 20 - 30 + 40 = -15.$$

$$V_{\text{тет}} = \frac{1}{6} |-15| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \text{ (куб. ед.)}.$$

С другой стороны,

$$V_{\text{тет}} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 A_2 A_3} \cdot A_4 H \Rightarrow A_4 H = \frac{3V_{\text{тет}}}{S_{\Delta A_1 A_2 A_3}}.$$

Согласно геометрическому смыслу модуля векторного произведения векторов, имеем

$$S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} |\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}|.$$

Вычисляем координаты векторного произведения векторов $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_1 A_3}$:

$$[\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}] = \left\{ \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \right\} = \{2; 1; -1\}$$

и его модуль:

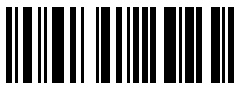
$$|[\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}]| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

Тогда,

$$S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Находим высоту $A_4 H$:

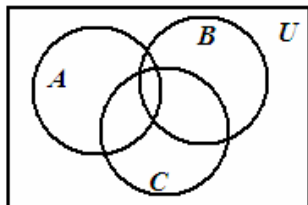
$$A_4 H = \frac{3 \cdot \frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{15}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \text{ (ед.)}$$



2 Индивидуальные задания

Номер варианта определяется по двум последним цифрам номера зачетной книжки (номера зачетной книжки mod 25).

Задача 1 Пусть в универсальном множестве U заданы три непустые взаимно пересекающихся множества A , B , C следующим образом:



Изобразить множество

1 $\overline{(A \setminus B)} \cup A \setminus (C \cap B).$

2 $\overline{B \setminus (A \cup B)} \setminus A \cap \overline{C}.$

3 $\overline{C \setminus A} \cap \overline{(C \setminus B)} \cup A.$

4 $(B \setminus \overline{A}) \cup C \setminus (\overline{A \cap B}).$

5 $\overline{A \cup (C \setminus A)} \cap C \setminus B.$

6 $(\overline{B \setminus A}) \cap \overline{(C \cap A)}.$

7 $\overline{A \cup (C \cap B)} \setminus \overline{B \cap A}.$

8 $\overline{C \setminus B} \cap (\overline{A \cup B}) \setminus C.$

9 $(A \setminus \overline{B}) \cup C \setminus (\overline{B \cap C}).$

10 $B \cup (\overline{C \setminus A}) \cap \overline{C \setminus B}.$

11 $(\overline{B \setminus A}) \cap C \cup (\overline{A \setminus B}).$

12 $C \cup (\overline{A \setminus B}) \cap A \setminus \overline{C}.$

13 $\overline{A \cup B} \setminus (\overline{A \setminus C} \cap B).$

14 $\overline{(B \setminus A)} \cup C \setminus (B \setminus \overline{A}).$

15 $\overline{A \cap (B \setminus \overline{C} \cup A)} \setminus B.$

16 $\overline{B \cap C} \setminus (A \cup \overline{B \setminus A}).$

17 $\overline{(C \setminus A)} \cap B \cup (\overline{A \setminus C}).$

18 $B \cup (\overline{A \setminus C} \cap A) \setminus \overline{B}.$

19 $(\overline{B \setminus C}) \cup (A \cap C \setminus \overline{B}).$

20 $(B \cap \overline{A}) \setminus C \cup (\overline{B \setminus A}).$

21 $(A \setminus \overline{B}) \cap B \cup (\overline{C \setminus A}).$

22 $\overline{A \cup (C \setminus B \cap A)} \setminus \overline{B}.$

23 $(\overline{B \setminus C}) \cup (B \setminus \overline{A \cap C}).$

24 $(\overline{B \cup C \cap A}) \setminus A \setminus \overline{C}.$

25 $(\overline{A \setminus B}) \cup C \cap (\overline{A \setminus B}).$

Задача 2 Произвести действия над комплексными числами $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 1 - i$, $z_4 = 2 - i$, $z_5 = 1 + 3i$.

1 $\frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_1 \cdot \overline{z_3}}$

2 $\frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_1 - \overline{z_3}}$

3 $\frac{z_2 + z_3}{\overline{z_1} \cdot z_2}$

4 $\frac{z_1 - z_2}{z_3 \cdot \overline{z_4}}$

5 $\frac{z_4 + z_1}{z_3 \cdot z_2}$

9 $\frac{\overline{z_1} \cdot z_4}{z_2 + z_3}$

10 $\frac{\overline{z_4} - z_1}{z_2 \cdot \overline{z_3}}$

11 $\frac{z_1 + z_2}{\overline{z_4} \cdot z_3}$

12 $\frac{z_4 - z_5}{z_5 \cdot \overline{z_1}}$

13 $\frac{z_5 + z_3}{z_1 \cdot z_2}$

17 $\frac{\overline{z_1 - z_5}}{z_3 \cdot \overline{z_4}}$

18 $\frac{z_4 + z_5}{z_3 \cdot \overline{z_2}}$

19 $\frac{z_5 \cdot z_2}{z_4 - z_1}$

20 $\frac{z_1 \cdot z_3}{(z_4 + z_5)}$

21 $\frac{z_2 \cdot \overline{z_5}}{z_1 - z_3}$



$$6 \frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{z_4 - z_1}$$

$$14 \frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_1 \cdot z_5}$$

$$22 \frac{\overline{z_1 \cdot z_4}}{z_2 + z_5}$$

$$7 \frac{z_1 \cdot z_3}{\overline{(z_4 + z_2)}}$$

$$15 \frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{z_1 - \overline{z_5}}$$

$$23 \frac{\overline{z_4 - z_1}}{z_2 \cdot \overline{z_5}}$$

$$8 \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{\overline{z_1 - z_3}}$$

$$16 \frac{\overline{z_5 + z_3}}{z_1 \cdot z_2}$$

$$24 \frac{z_1 + \overline{z_5}}{z_4 \cdot z_3}$$

$$25 \frac{\overline{z_4 - z_3}}{z_5 \cdot z_1}$$

Задача 3 Найти корни уравнения

$$1 \ z^3 - i = 0;$$

$$9 \ z^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = 0;$$

$$17 \ z^3 - \sqrt{3} + i = 0;$$

$$2 \ z^3 + i = 0;$$

$$10 \ z^3 - \sqrt{3}i = 0;$$

$$18 \ z^3 - \sqrt{3}i = 0;$$

$$3 \ z^3 - 1 + i = 0;$$

$$11 \ z^3 - 2 - 2i = 0;$$

$$19 \ z^3 - 3 - \sqrt{3}i = 0;$$

$$4 \ z^3 - 1 - i = 0;$$

$$12 \ z^3 - \sqrt{3} + \sqrt{3}i;$$

$$20 \ z^3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = 0;$$

$$5 \ z^3 + 1 + i = 0;$$

$$13 \ z^3 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0;$$

$$21 \ z^3 - \sqrt{3} - \sqrt{3}i = 0;$$

$$6 \ z^3 - 2 + 2i = 0;$$

$$14 \ z^3 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 0;$$

$$22 \ z^3 + 1 - \sqrt{3}i = 0;$$

$$7 \ z^3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = 0;$$

$$15 \ z^3 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0;$$

$$23 \ z^3 + 3 + 3i = 0;$$

$$8 \ z^3 + 3 - 3i = 0;$$

$$16 \ z^3 + 2 - 2i = 0;$$

$$24 \ z^3 + \sqrt{3} - i = 0;$$

$$25 \ z^3 + 1 + \sqrt{3}i = 0.$$

Задача 4 Найти общий делитель многочленов и представить его в линейной форме.

$$1 \ f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3,$$

$$g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

$$2 \ f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6,$$

$$g(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6.$$

$$3 \ f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12, \ g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17.$$

$$4 \ f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1,$$

$$g(x) = x^2 - x - 1.$$

$$5 \ f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9,$$

$$g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$$

$$6 \ f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,$$

$$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2.$$

$$7 \ f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1,$$

$$g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

$$8 \ f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1,$$

$$g(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

$$9 \ f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2,$$

$$g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2.$$

$$10 \ f(x) = x^6 + x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 2,$$

$$g(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 6.$$

$$11 \quad f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17, \quad g(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12.$$

$$12 \quad f(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2, \quad g(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2.$$

$$13 \quad f(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6, \quad g(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6.$$

$$14 \quad f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3.$$

$$15 \quad f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + 6x^2 + 4x + 6, \\ g(x) = x^6 + x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 2.$$

$$16 \quad f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17, \quad g(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12.$$

$$17 \quad f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, \quad g(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

$$18 \quad f(x) = x^3 + x^2 - x - 1, \quad g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1.$$

$$19 \quad f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1, \quad g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

$$20 \quad f(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1, \quad g(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1.$$

$$21 \quad f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3, \quad g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1.$$

$$22 \quad f(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9, \quad g(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4.$$

$$23 \quad f(x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4, \quad g(x) = 4x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 5x + 9.$$

$$24 \quad f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17, \quad g(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12.$$

$$25 \quad f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3.$$

Задача 5 Даны две матрицы A и B .

Найти: а) AB ; б) BA ; в) A^{-1} ; г) AA^{-1} ; д) $A^{-1}A$.

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$3 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$4 \quad A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$5 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$



$$\mathbf{6} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{7} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{8} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{9} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{10} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{11} \quad A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -4 & -4 & 4 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{12} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{13} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{14} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{15} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{16} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$



$$17 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$18 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$19 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$20 \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$21 \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$22 \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$23 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$24 \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$25 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 6 Дан определитель.

1) Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2} , a_{3j} .

2) Вычислить данный определитель

а) разложив его по элементам первой строки;

б) приведением определителя к треугольному виду;

в) методом опорного элемента.

$$1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix};$$

$$i=3, j=1$$

$$2 \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix};$$

$$i=2, j=4$$

$$3 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix};$$

$$i=3, j=3$$

$$4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$i=3, j=2$$

$$5 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix};$$

$$i=1, j=3$$

$$6 \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix};$$

$$i=3, j=4$$

$$7 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$i=3, j=2$$

$$14 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$i=1, j=2$$

$$15 \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix};$$

$$i=1, j=3$$

$$16 \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix};$$

$$i=4, j=1$$

$$17 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix};$$

$$i=4, j=1$$

$$18 \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$i=4, j=2$$

$$19 \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$i=1, j=2$$

$$20 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$i=2, j=4$$

$$8 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -5 \end{vmatrix};$$

$$i=1, j=3$$

$$9 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix};$$

$$i=4, j=3$$

$$10 \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$i=2, j=2$$

$$11 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$i=1, j=2$$

$$12 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix};$$

$$i=4, j=3$$

$$13 \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=4$$

$$21 \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix};$$

$$i=1, j=4$$

$$22 \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$i=2, j=4$$

$$23 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

$$i=4, j=4$$

$$24 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$i=3, j=2$$

$$25 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix};$$

$$i=2, j=3$$

Задача 7 Найти ранг матрицы.



$$\mathbf{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{7} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -2 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{14} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$10 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$15 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$11 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$16 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$12 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$17 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$13 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$18 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$19 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & -3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$23 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$20 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$24 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$21 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$25 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22 \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Задача 8 Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы (матричным методом);

в) методом Гаусса.

$$1 \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$15 \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$16 \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1. \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$11 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$$

$$12 \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$13 \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$21 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$23 \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

$$24 \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$25 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

Задача 9 Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.



$$1 \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4 \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5 \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$6 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$7 \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$8 \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$9 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$10 \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$11 \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$14 \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$15 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

$$16 \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$17 \begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$18 \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$19 \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$20 \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$21 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$22 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$23 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$24 \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$



$$\begin{array}{ll}
 12 \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{array} \right. & 25 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{array} \right. \\
 13 \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{array} \right. &
 \end{array}$$

Задача 10 Найти ФСР и общее решение системы уравнений.

$$\begin{array}{ll}
 1 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{array} \right. & 14 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{array} \right. \\
 2 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{array} \right. & 15 \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{array} \right. \\
 3 \left\{ \begin{array}{l} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{array} \right. & 16 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{array} \right. \\
 4 \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{array} \right. & 17 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{array} \right. \\
 5 \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{array} \right. & 18 \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{array} \right. \\
 6 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{array} \right. & 19 \left\{ \begin{array}{l} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{array} \right. \\
 7 \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{array} \right. & 20 \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
8 \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases} & 21 \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases} \\
9 \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases} & 22 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \\
10 \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} & 23 \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} \\
11 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases} & 24 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \\
12 \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases} & 25 \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases} \\
13 \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases} &
\end{array}$$

Задача 11 По координатам точек A, B, C для указанных векторов найти:

а) модуль вектора $\vec{a}$; б) скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$; в) проекцию вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{d}$; г) координаты точки M , делящей отрезок l в отношении α / β .

11.1 $A(-2, -2, 4), B(1, 3, -2), C(1, 4, 2), \vec{a} = 2\vec{AC} - 3\vec{BA}, \vec{b} = \vec{BC},$
 $\vec{c} = \vec{BC}, \vec{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 1.$

11.2 $A(2, 4, 3), B(3, 1, -4), C(-1, 2, 2), \vec{a} = 2\vec{BA} + 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{BA},$
 $\vec{c} = \vec{b}, \vec{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 1, \beta = 4.$

11.3 $A(2, 4, 5), B(1, -2, 3), C(-1, -2, 4), \vec{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}, \vec{b} = \vec{BC},$
 $\vec{c} = \vec{b}, \vec{d} = \vec{AB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 3.$

11.4 $A(-1, -2, 4), B(-1, 3, 5), C(1, 4, 2), \vec{a} = 3\vec{AC} - 7\vec{BC}, \vec{b} = \vec{AB},$
 $\vec{c} = \vec{b}, \vec{d} = \vec{AC}, l = AC, \alpha = 1, \beta = 7.$

11.5 $A(1, 3, 2), B(-2, 4, -1), C(1, 3, -2), \vec{a} = 2\vec{AB} + 5\vec{CB}, \vec{b} = \vec{AC},$

$$\bar{c} = \bar{b}, \bar{d} = \overline{AB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 4.$$

$$\mathbf{11.6} \quad A(2, -4, 3), B(-3, -2, 4), C(0, 0, -2), \bar{a} = 3\overline{AC} - 4\overline{CB}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AB}, \\ \bar{d} = \overline{CB}, l = AC, \alpha = 2, \beta = 1.$$

$$\mathbf{11.7} \quad A(3, 4, -4), B(-2, 1, 2), C(2, -3, 1), \bar{a} = 5\overline{CB} + 4\overline{AC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{BA}, \\ \bar{d} = \overline{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 5.$$

$$\mathbf{11.8} \quad A(0, 2, 5), B(2, -3, 4), C(3, 2, -5), \bar{a} = -3\overline{AB} + 4\overline{CB}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AC}, \\ \bar{d} = \overline{AB}, l = AC, \alpha = 3, \beta = 2.$$

$$\mathbf{11.9} \quad A(-2, -3, -4), B(2, -4, 0), C(1, 4, 5), \bar{a} = 4\overline{AC} - 8\overline{BC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AB}, \\ \bar{d} = \overline{BC}, l = AB, \alpha = 4, \beta = 2.$$

$$\mathbf{11.10} \quad A(-2, -3, -2), B(1, 4, 2), C(1, -3, 3), \bar{a} = 2\overline{AC} - 4\overline{BC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AB}, \\ \bar{d} = \overline{AC}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 1.$$

$$\mathbf{11.11} \quad A(5, 6, 1), B(-2, 4, -1), C(3, -3, 3), \bar{a} = -3\overline{AB} - 4\overline{BC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AC}, \\ \bar{d} = \overline{AB}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 2.$$

$$\mathbf{11.12} \quad A(10, 6, 3), B(-2, 4, 5), C(3, -4, -6), \bar{a} = 5\overline{AC} - 2\overline{CB}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{BA}, \\ \bar{d} = \overline{AC}, l = CB, \alpha = 1, \beta = 5.$$

$$\mathbf{11.13} \quad A(3, 2, 4), B(-2, 1, 3), C(2, -2, -1), \bar{a} = 4\overline{BC} - 3\overline{AC}, \bar{b} = \overline{BA}, \\ \bar{c} = \overline{AC}, \bar{d} = \overline{BC}, l = AC, \alpha = 2, \beta = 4.$$

$$\mathbf{11.14} \quad A(-2, 3, -4), B(3, -1, 2), C(4, 2, 4), \bar{a} = 7\overline{AC} + 4\overline{CB}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AB}, \\ \bar{d} = \overline{CB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 5.$$

$$\mathbf{11.15} \quad A(4, 5, 3), B(-4, 2, 3), C(5, -6, -2), \bar{a} = 9\overline{AB} - 4\overline{BC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AC}, \\ \bar{d} = \overline{AB}, l = BC, \alpha = 5, \beta = 1.$$

$$\mathbf{11.16} \quad A(2, 4, 6), B(-3, 5, 1), C(4, -5, -4), \bar{a} = -6\overline{BC} + 2\overline{BA}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{CA}, \\ \bar{d} = \overline{BA}, l = BC, \alpha = 1, \beta = 3.$$

$$\mathbf{11.17} \quad A(-4, -2, -5), B(3, 7, 2), C(4, 6, -3), \bar{a} = 9\overline{BA} + 3\overline{BC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AC}, \\ \bar{d} = \overline{BC}, l = BA, \alpha = 4, \beta = 3.$$

$$\mathbf{11.18} \quad A(5, 4, 4), B(-5, 2, 3), C(4, 2, -5), \bar{a} = 11\overline{AC} - 6\overline{AB}, \bar{b} = \overline{BC}, \\ \bar{c} = \overline{AB}, \bar{d} = \overline{AC}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 1.$$

$$\mathbf{11.19} \quad A(3, 4, 6), B(-4, 6, 4), C(5, -2, -3), \bar{a} = -7\overline{BC} + 4\overline{CA}, \bar{b} = \overline{BA}, \bar{c} = \overline{CA}, \\ \bar{d} = \overline{BC}, l = BA, \alpha = 5, \beta = 3.$$

$$\mathbf{11.20} \quad A(-5, -2, -6), B(3, 4, 5), C(2, -5, 4), \bar{a} = 8\overline{AC} - 5\overline{BC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{AB}, \\ \bar{d} = \overline{BC}, l = AC, \alpha = 3, \beta = 4.$$

$$\mathbf{11.21} \quad A(3, 4, 15), B(5, -2, 6), C(4, 2, -7), \bar{a} = -7\overline{AC} + 5\overline{AB}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{BC}, \\ \bar{d} = \overline{AC}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 3.$$

$$\mathbf{11.22} \quad A(4, 3, 2), B(-4, -3, 5), C(6, 4, -3), \bar{a} = 8\overline{AC} - 5\overline{BC}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{BA}, \\ \bar{d} = \overline{AC}, l = BC, \alpha = 2, \beta = 5.$$

11.23 $A(-5,4,3), B(4,5,2), C(2,7,-4), \bar{a} = 3\overline{BC} + 2\overline{AB}, \bar{b} = \bar{c} = \overline{CA},$
 $\bar{d} = \overline{AB}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 4.$

11.24 $A(4,6,3), B(-5,2,6), C(4,-4,-3), \bar{a} = 4\overline{CB} - \overline{AC}, \bar{b} = \overline{AB},$
 $\bar{c} = \overline{CB}, \bar{d} = \overline{AC}, l = AB, \alpha = 5, \beta = 4.$

11.25 $A(3,4,6), B(-4,6,4), C(5,-2,-3), \bar{a} = -7\overline{BC} + 4\overline{CA}, \bar{b} = \overline{BA}, \bar{c} = \overline{CA},$
 $\bar{d} = \overline{BC}, l = BA, \alpha = 5, \beta = 3.$

Задача 12 Написать разложение вектора $\bar{x}$ по векторам $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}.$

- | | | | |
|--|---------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 12.1 $\bar{x} = \{-2, 0, 9\},$ | $\bar{p} = \{0, -1, 2\},$ | $\bar{q} = \{1, 0, -1\},$ | $\bar{r} = \{-1, 2, 4\}.$ |
| 12.2 $\bar{x} = \{5, -12, 1\},$ | $\bar{p} = \{1, -3, 0\},$ | $\bar{q} = \{1, -1, 1\},$ | $\bar{r} = \{0, -1, 2\}.$ |
| 12.3 $\bar{x} = \{0, 2, 4\},$ | $\bar{p} = \{3, 1, -1\},$ | $\bar{q} = \{0, -3, 1\},$ | $\bar{r} = \{1, 1, 1\}.$ |
| 12.4 $\bar{x} = \{-1, 5, 5\},$ | $\bar{p} = \{2, 1, 1\},$ | $\bar{q} = \{-2, 0, -3\},$ | $\bar{r} = \{-1, 2, 1\}.$ |
| 12.5 $\bar{x} = \{-1, -2, 3\},$ | $\bar{p} = \{2, 0, 1\},$ | $\bar{q} = \{1, 2, -1\},$ | $\bar{r} = \{0, 4, -1\}.$ |
| 12.6 $\bar{x} = \{-5, 2, -1\},$ | $\bar{p} = \{-1, 1, 0\},$ | $\bar{q} = \{2, -1, 3\},$ | $\bar{r} = \{1, 0, 1\}.$ |
| 12.7 $\bar{x} = \{1, -5, 7\},$ | $\bar{p} = \{0, -1, 1\},$ | $\bar{q} = \{2, 0, 1\},$ | $\bar{r} = \{3, -1, 0\}.$ |
| 12.8 $\bar{x} = \{5, 1, 4\},$ | $\bar{p} = \{2, 0, 2\},$ | $\bar{q} = \{0, -1, 1\},$ | $\bar{r} = \{3, -1, 4\}.$ |
| 12.9 $\bar{x} = \{1, 1, -1\},$ | $\bar{p} = \{1, 1, 0\},$ | $\bar{q} = \{-1, 0, 1\},$ | $\bar{r} = \{-1, 0, 2\}.$ |
| 12.10 $\bar{x} = \{-3, 7, 4\},$ | $\bar{p} = \{-2, 2, 1\},$ | $\bar{q} = \{2, 0, 1\},$ | $\bar{r} = \{1, 1, 1\}.$ |
| 12.11 $\bar{x} = \{-9, 5, 5\},$ | $\bar{p} = \{4, 1, 1\},$ | $\bar{q} = \{2, 0, -3\},$ | $\bar{r} = \{-1, 2, 1\}.$ |
| 12.12 $\bar{x} = \{-5, -5, 5\},$ | $\bar{p} = \{-2, 0, 1\},$ | $\bar{q} = \{1, 3, -1\},$ | $\bar{r} = \{0, 4, 1\}.$ |
| 12.13 $\bar{x} = \{3, -3, 4\},$ | $\bar{p} = \{1, 0, 2\},$ | $\bar{q} = \{0, 1, 0\},$ | $\bar{r} = \{2, -1, 4\}.$ |
| 12.14 $\bar{x} = \{3, 3, -1\},$ | $\bar{p} = \{3, 1, 0\},$ | $\bar{q} = \{-1, 2, 1\},$ | $\bar{r} = \{-1, 0, 2\}.$ |
| 12.15 $\bar{x} = \{-1, 7, -4\},$ | $\bar{p} = \{-1, 2, 1\},$ | $\bar{q} = \{2, 0, 3\},$ | $\bar{r} = \{1, 1, -1\}.$ |
| 12.16 $\bar{x} = \{6, 5, -14\},$ | $\bar{p} = \{1, 1, 4\},$ | $\bar{q} = \{0, -3, 2\},$ | $\bar{r} = \{2, 1, -1\}.$ |
| 12.17 $\bar{x} = \{6, -1, 7\},$ | $\bar{p} = \{1, -2, 0\},$ | $\bar{q} = \{-1, 1, 3\},$ | $\bar{r} = \{1, 0, 4\}.$ |
| 12.18 $\bar{x} = \{5, 15, 0\},$ | $\bar{p} = \{1, 0, 5\},$ | $\bar{q} = \{-1, 3, 2\},$ | $\bar{r} = \{0, -1, 1\}.$ |
| 12.19 $\bar{x} = \{2, -1, 11\},$ | $\bar{p} = \{1, 1, 0\},$ | $\bar{q} = \{0, 1, -2\},$ | $\bar{r} = \{1, 0, 3\}.$ |
| 12.20 $\bar{x} = \{11, 5, -3\},$ | $\bar{p} = \{1, 0, 2\},$ | $\bar{q} = \{-1, 0, 1\},$ | $\bar{r} = \{2, 5, -3\}.$ |
| 12.21 $\bar{x} = \{8, 0, 5\},$ | $\bar{p} = \{2, 0, 1\},$ | $\bar{q} = \{1, 1, 0\},$ | $\bar{r} = \{4, 1, 2\}.$ |
| 12.22 $\bar{x} = \{3, 1, 8\},$ | $\bar{p} = \{0, 1, 3\},$ | $\bar{q} = \{1, 2, -1\},$ | $\bar{r} = \{2, 0, -1\}.$ |
| 12.23 $\bar{x} = \{8, 1, 12\},$ | $\bar{p} = \{1, 2, -1\},$ | $\bar{q} = \{3, 0, 2\},$ | $\bar{r} = \{-1, 1, 1\}.$ |
| 12.24 $\bar{x} = \{-9, -8, -3\},$ | $\bar{p} = \{1, 4, 1\},$ | $\bar{q} = \{-3, 2, 0\},$ | $\bar{r} = \{1, -1, 2\}.$ |
| 12.25 $\bar{x} = \{-5, 9, -13\},$ | $\bar{p} = \{0, 1, -2\},$ | $\bar{q} = \{3, -1, 1\},$ | $\bar{r} = \{4, 1, 0\}.$ |

Задача 13 Вычислить площадь параллелограмма построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, $\angle \bar{p}, \bar{q}$ - угол между векторами $\bar{p}, \bar{q}.$

13.1 $\bar{a} = \bar{p} + 3\bar{q}, \quad \bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}, \quad |\bar{p}| = 2, \quad |\bar{q}| = 1, \quad \left(\overset{\wedge}{\bar{p}\bar{q}} \right) = \pi/6.$



- 13.2** $\bar{a} = 2\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 3\bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 2, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/4$.
- 13.3** $\bar{a} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/2$.
- 13.4** $\bar{a} = 3\bar{p} - 5\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 1, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = 5\pi/6$.
- 13.5** $\bar{a} = \bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 6, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = 3\pi/4$.
- 13.6** $\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 3$, $|\bar{q}| = 2, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/3$.
- 13.7** $\bar{a} = 2\bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/2$.
- 13.8** $\bar{a} = \bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 4\bar{q}$, $|\bar{p}| = 7$, $|\bar{q}| = 1, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/4$.
- 13.9** $\bar{a} = 4\bar{p} - 4\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 1, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/6$.
- 13.10** $\bar{a} = \bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/3$.
- 13.11** $\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/6$.
- 13.12** $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/4$.
- 13.13** $\bar{a} = \bar{p} - 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 1/5$, $|\bar{q}| = 1, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/2$.
- 13.14** $\bar{a} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 5\bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$, $|\bar{q}| = 1/2, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = 5\pi/6$.
- 13.15** $\bar{a} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = 3\pi/4$.
- 13.16** $\bar{a} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/3$.
- 13.17** $\bar{a} = 2\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 3\bar{q}$, $|\bar{p}| = 3$, $|\bar{q}| = 2, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/2$.
- 13.18** $\bar{a} = 4\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 7$, $|\bar{q}| = 2, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/4$.
- 13.19** $\bar{a} = \bar{p} - 4\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$, $|\bar{q}| = 2, \left(\hat{\bar{p}\bar{q}}\right) = \pi/6$.



- 13.20 $\bar{a} = \bar{p} + 4\bar{q}$, $\bar{b} = 2\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 7$, $|\bar{q}| = 2$, $\left(\hat{\frac{\bar{p}}{\bar{p}\bar{q}}}\right) = \pi/3$.
- 13.21 $\bar{a} = 3\bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 10$, $|\bar{q}| = 1$, $\left(\hat{\frac{\bar{p}}{\bar{p}\bar{q}}}\right) = \pi/2$.
- 13.22 $\bar{a} = 4\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 5$, $|\bar{q}| = 4$, $\left(\hat{\frac{\bar{p}}{\bar{p}\bar{q}}}\right) = \pi/4$.
- 13.23 $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 6$, $|\bar{q}| = 7$, $\left(\hat{\frac{\bar{p}}{\bar{p}\bar{q}}}\right) = \pi/3$.
- 13.24 $\bar{a} = 3\bar{p} - \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 3$, $|\bar{q}| = 4$, $\left(\hat{\frac{\bar{p}}{\bar{p}\bar{q}}}\right) = \pi/3$.
- 13.25 $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 3$, $\left(\hat{\frac{\bar{p}}{\bar{p}\bar{q}}}\right) = \pi/4$.

Задача 14 Компланарны ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$?

- 14.1 $\bar{a} = \{1, 3, 0\}$, $\bar{b} = \{-1, 0, -1\}$, $\bar{c} = \{1, 2, 1\}$.
- 14.2 $\bar{a} = \{3, 2, 1\}$, $\bar{b} = \{5, 5, 5\}$, $\bar{c} = \{0, -1, -2\}$.
- 14.3 $\bar{a} = \{0, 6, 1\}$, $\bar{b} = \{0, 2, 0\}$, $\bar{c} = \{1, 1, 1\}$.
- 14.4 $\bar{a} = \{4, 1, -2\}$, $\bar{b} = \{3, 2, 1\}$, $\bar{c} = \{5, 5, 5\}$.
- 14.5 $\bar{a} = \{2, 5, 0\}$, $\bar{b} = \{2, -1, 2\}$, $\bar{c} = \{1, 1, 1\}$.
- 14.6 $\bar{a} = \{1, 0, -1\}$, $\bar{b} = \{-2, -1, 0\}$, $\bar{c} = \{3, 1, -1\}$.
- 14.7 $\bar{a} = \{4, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{5, 1, 2\}$, $\bar{c} = \{2, 1, -1\}$.
- 14.8 $\bar{a} = \{-2, 4, 3\}$, $\bar{b} = \{4, 7, 5\}$, $\bar{c} = \{2, 0, -1\}$.
- 14.9 $\bar{a} = \{2, 5, 8\}$, $\bar{b} = \{1, -3, -7\}$, $\bar{c} = \{0, 5, 10\}$.
- 14.10 $\bar{a} = \{1, 5, 1\}$, $\bar{b} = \{1, 7, 1\}$, $\bar{c} = \{2, 2, 1\}$.
- 14.11 $\bar{a} = \{2, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{-1, 1, -1\}$, $\bar{c} = \{2, 2, 1\}$.
- 14.12 $\bar{a} = \{-3, 0, 1\}$, $\bar{b} = \{0, 5, 5\}$, $\bar{c} = \{5, -1, -2\}$.
- 14.13 $\bar{a} = \{-4, 1, 1\}$, $\bar{b} = \{-1, 5, 5\}$, $\bar{c} = \{5, 0, 3\}$.
- 14.14 $\bar{a} = \{3, 1, -2\}$, $\bar{b} = \{1, -2, 1\}$, $\bar{c} = \{-5, 2, 3\}$.
- 14.15 $\bar{a} = \{-3, 5, -1\}$, $\bar{b} = \{-2, 1, -2\}$, $\bar{c} = \{-1, 2, -1\}$.
- 14.16 $\bar{a} = \{4, 1, -1\}$, $\bar{b} = \{2, -1, 3\}$, $\bar{c} = \{-3, 2, -1\}$.
- 14.17 $\bar{a} = \{3, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{-2, 2, -1\}$, $\bar{c} = \{-2, 2, -1\}$.
- 14.18 $\bar{a} = \{2, -4, -3\}$, $\bar{b} = \{3, 5, 5\}$, $\bar{c} = \{2, 2, 2\}$.
- 14.19 $\bar{a} = \{-2, 4, 4\}$, $\bar{b} = \{2, -3, -7\}$, $\bar{c} = \{0, 5, 1\}$.
- 14.20 $\bar{a} = \{-1, 4, -1\}$, $\bar{b} = \{-1, 6, -1\}$, $\bar{c} = \{3, -2, 1\}$.
- 14.21 $\bar{a} = \{-1, 5, 1\}$, $\bar{b} = \{-1, 5, -1\}$, $\bar{c} = \{3, 2, 3\}$.
- 14.22 $\bar{a} = \{1, 2, -1\}$, $\bar{b} = \{4, 4, 4\}$, $\bar{c} = \{1, 5, -2\}$.
- 14.23 $\bar{a} = \{5, 5, 5\}$, $\bar{b} = \{4, -4, 3\}$, $\bar{c} = \{0, 1, -2\}$.
- 14.24 $\bar{a} = \{3, 3, -2\}$, $\bar{b} = \{2, -2, 1\}$, $\bar{c} = \{0, 1, 5\}$.
- 14.25 $\bar{a} = \{3, 5, 0\}$, $\bar{b} = \{1, -1, -2\}$, $\bar{c} = \{2, 2, 2\}$.



Задача 15 Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

15.1	$A_1(2, 4, 7),$	$A_2(3, 3, 2),$	$A_3(0, 1, 2),$	$A_4(-3, 7, -2).$
15.2	$A_1(-2, 4, 8),$	$A_2(4, -1, 2),$	$A_3(-8, 7, 10),$	$A_4(-3, 4, -2).$
15.3	$A_1(6, 1, 3),$	$A_2(6, -2, -3),$	$A_3(2, 2, 0),$	$A_4(-5, 1, 0).$
15.4	$A_1(0, -1, 2),$	$A_2(-3, 3, -4),$	$A_3(-9, -5, 0),$	$A_4(-8, -5, 4).$
15.5	$A_1(0, -4, 3),$	$A_2(-5, 1, -2),$	$A_3(4, 7, -2),$	$A_4(-9, 7, 8).$
15.6	$A_1(2, 1, 1),$	$A_2(0, 5, 7),$	$A_3(3, -3, -7),$	$A_4(1, 8, 5).$
15.7	$A_1(4, 1, -1),$	$A_2(1, 4, -1),$	$A_3(0, 1, 3),$	$A_4(-2, 0, 0).$
15.8	$A_1(5, 2, 1),$	$A_2(4, 5, 4),$	$A_3(8, 3, -3),$	$A_4(-7, 12, -4).$
15.9	$A_1(0, 2, -2),$	$A_2(1, 9, 3),$	$A_3(6, -6, -2),$	$A_4(3, -2, 8).$
15.10	$A_1(12, 2, 3),$	$A_2(-7, -5, 0),$	$A_3(-4, -8, -5),$	$A_4(-4, 0, -3).$
15.11	$A_1(1, 3, 6),$	$A_2(2, 2, 1),$	$A_3(-1, 0, 1),$	$A_4(-4, 6, -3).$
15.12	$A_1(-4, 2, 6),$	$A_2(2, -3, 0),$	$A_3(-10, 5, 8),$	$A_4(-5, 2, -4).$
15.13	$A_1(7, 2, 4),$	$A_2(7, -1, -2),$	$A_3(3, 3, 1),$	$A_4(-4, 2, 1).$
15.14	$A_1(2, 1, 4),$	$A_2(-1, 5, -2),$	$A_3(-7, -3, 2),$	$A_4(-6, -3, 6).$
15.15	$A_1(-1, -5, 2),$	$A_2(-6, 0, -3),$	$A_3(3, 6, -3),$	$A_4(-10, 6, 7).$
15.16	$A_1(0, -1, -1),$	$A_2(-2, 3, 5),$	$A_3(1, -5, -9),$	$A_4(-1, -6, 3).$
15.17	$A_1(5, 2, 0),$	$A_2(2, 5, 0),$	$A_3(1, 2, 4),$	$A_4(-1, 1, 1).$
15.18	$A_1(2, -1, -2),$	$A_2(1, 2, 1),$	$A_3(5, 0, -6),$	$A_4(-10, 9, -7).$
15.19	$A_1(-2, 0, -4),$	$A_2(-1, 7, 1),$	$A_3(4, -8, -4),$	$A_4(1, -4, 6).$
15.20	$A_1(14, 4, 5),$	$A_2(-5, -3, 2),$	$A_3(-2, -6, -3),$	$A_4(-2, 2, -1).$
15.21	$A_1(1, 2, 0),$	$A_2(3, 0, -3),$	$A_3(5, 2, 6),$	$A_4(8, 4, -9).$
15.22	$A_1(2, -1, 2),$	$A_2(1, 2, -1),$	$A_3(3, 2, 1),$	$A_4(-4, 2, 5).$
15.23	$A_1(1, 1, 2),$	$A_2(-1, 1, 3),$	$A_3(2, -2, 4),$	$A_4(-1, 0, -2).$
15.24	$A_1(2, 3, 1),$	$A_2(4, 1, -2),$	$A_3(6, 3, 7),$	$A_4(7, 5, -3).$
15.25	$A_1(1, 1, -1),$	$A_2(2, 3, 1),$	$A_3(3, 2, 1),$	$A_4(5, 9, -8).$



Список использованных источников

- 1 **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры/Д.В. Беклемишев. - М.: Наука,1987 - 320 с.
- 2 **Бугров, Я.С.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - М.:Наука,1980- 222 с.
- 3 **Бюшгенс, С.С.,** Дифференциальная геометрия / С.С. Бюшгенс. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2006. – 304 с.
- 4 **Глухов, М.М.** Алгебра и аналитическая геометрия: учебное пособие. /М.М. Глухов. – М.: Гелиос АРВ, 2005. – 392с., ил.
- 5 **Гусак, А.А.** Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2т. Т.1. /А.А. Гусак. – 5-е изд. – Минск.: ТетраСистемс, 2004. – 544с.
- 6 **Гусак, А.А.** Пособие к решению задач по высшей математике. / А.А. Гусак. - Минск.: БГУ,1973-532 с.
- 7 **Ефимов, Н.В.** Квадратичные формы и матрицы. / Н.В. Ефимов. - М.: Наука,1975 - 160 с.
- 8 **Зейферт, Г.** Топология. / Г. Зейферт, В. Трельфалль: пер. с нем. - изд. 2-е.-М.-Ижевск: R&C Dynamics, 2001.-448 с.
- 9 **Канатников, А.Н.** Линейная алгебра. / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001 – 336 с.
- 10 **Кострикин, А.И.** Введение в алгебру. / А.Н. Кострикин. - Часть I, II, III. - М.: Физико-математическая литература, 2001 – 368 с.
- 11 **Куратовский, К.** Топология. / К. Куратовский: пер. с англ. Т. 1. - М.: Мир, 1966 .-594с.
- 12 **Курош, А.Г.** Курс высшей алгебры. / А.Г. Курош. - М.: Наука,1971-432 .
- 13 **Новиков, С. П.** Топология. / С. П. Новиков.- 2-е изд., испр. и доп. - М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2002. - 336 с. - (Современная математика)
- 14 **Норден А.П.** Дифференциальная геометрия. уч. пособие для пед. ин-тов. / А.П. Норден. – М.: Учпедгиз, 1948.-215 с.



15 **Позняк, Э.Г.**, Дифференциальная геометрия: Первое знакомство / Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 408с.

16 **Сикорская, Г.А.** Курс лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие для студентов транспортного факультета / Г.А. Сикорская – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007г., 343с.

17 **Сизый, С.В.** Лекции по теории чисел: учебное пособие для математических специальностей. / С.В. Сизый – 2-е изд., исправ. и доп. – Екатеринбург: 2002. – 194с

18 **Фиников, С.П.** Дифференциальная геометрия. / С.П. Фиников. - М.: МГУ, 1961 – 158 с.

19 **Фрид, Э.** Элементарное введение в абстрактную алгебру. / Э.Фрид. - М.: Мир, 1979 – 260с.

20 **Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии:** учебное пособие для вузов / Р.Ф. Апатенок [и др.]- 2-е изд., перераб. и доп. - Минск: Вышэйш. шк., 1986. - 272 с.